

Allgemeine Exponentialfunktion: Gebrauchtwagen Übung

PKWs verlieren ab dem Kaufdatum erfahrungsgemäß jährlich ein Fünftel ihres Werts. In dieser Aufgabe gehen wir von einem konkreten PKW aus, der ein Jahr nach dem Kauf noch einen Gebrauchtwert von 32 000,- € besitzt. Auf die Verwendung von Maßeinheiten kann bei dieser Aufgabe verzichtet werden. Runden Sie alle Ergebnisse gegebenenfalls auf Eurocent.

- a) Berechnen Sie den Neuwert des Wagens. Wie viele € hat der Wagen demnach im ersten Jahr an Wert verloren?
- b) Übertragen Sie die folgende Tabelle in Ihre Aufzeichnungen und vervollständigen Sie diese.

Alter t in a	0	1	2	3	4	8
Wert W in €		32 000				

- c) Begründen Sie mit Worten, dass der Zusammenhang zwischen dem Alter t (in Jahren) und dem Wert W des PKWs (in €) durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann.
- d) Bestimmen Sie mit Hilfe zweier Wertepaare für die Werte $t_1 = 1$ und $t_2 = 4$ den Funktionsterm $W(t)$ dieser Exponentialfunktion. Überprüfen Sie, ob die anderen berechneten Wertepaare aus Ihrer Tabelle die Funktionsgleichung erfüllen.
- e) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktion $W(t)$ den Wert des Wagens bei einem Alter von 6 bzw. 9 Jahren. Berechnen Sie auch das Alter, bei dem der Wert des PKWs noch rund 3 400,- € beträgt.
- f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $W(t)$ für die ersten zwölf Jahre in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie gegebenenfalls weitere Funktionswerte.
- g) Die Halbwertszeit t_H ist die Zeitdauer, nach der sich jeweils der Wert des PKWs halbiert. Schätzen Sie t_H aus dem Graphen ab und berechnen Sie diese anschließend.
- h) Ab einem Alter von acht Jahren beginnen sich oft Reparaturen zu häufen. Wie viel Geld müssen Sie ausgehend vom Kauf Ihres neue PKWs monatlich sparen, um sich acht Jahre später nach dessen Verkauf einen anderen Neuwagen für 50 000,- € leisten zu können? Vernachlässigen Sie zur Vereinfachung bei der Rechnung erhaltene Zinsen auf Ihre Ersparnisse.

Allgemeine Exponentialfunktion: Gebrauchtwagen Lösung

a) Der Neuwert des Wagens beträgt $\frac{32\,000}{0,8} = 40\,000$ (€). Der Wagen hat im ersten Jahr 8 000 € an Wert verloren.

b)

Alter t in a	0	1	2	3	4	8
Wert W in €	40 000	32 000	25 600	20 480	16 384	6 710,89

c) Der Wert des Wagens nimmt jedes Jahr um denselben Anteil (20 %) ab. (Hinweis: Der Wachstumsfaktor ergibt sich aus dem konstanten Quotienten zweier aufeinander folgender Werte.)

d) Der allgemeine Funktionsterm lautet $W(t) = a \cdot b^t$.
Aus den Wertepaaren ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{I) } a \cdot b &= 32\,000 \\ \text{II) } a \cdot b^4 &= 16\,384 \end{aligned}$$

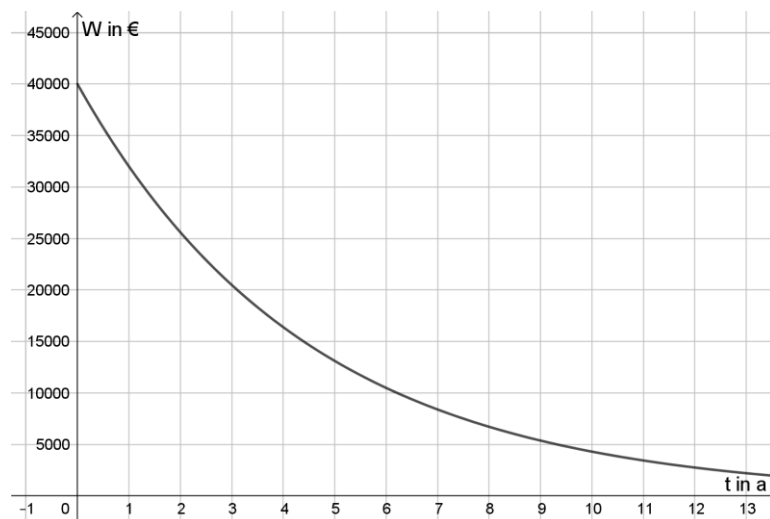
mit den Lösungen $a = 40\,000$ und $b = 0,8$.
Damit ist $W(t) = 40\,000 \cdot 0,8^t$

e) $W(6) = 10\,485,76$

$W(9) \approx 5\,368,71$

Die Gleichung $40\,000 \cdot 0,8^t = 3\,400$ besitzt die Lösung $t \approx 11,05$, d.h. nach rund 11 Jahren ist der PKW noch ca. 3 400 € wert.

f)



g) $a \cdot 0,8^t = 0,5 \cdot a$
 $0,8^t = 0,5$

$t_H = \log_{0,8}(0,5) \approx 3,11$; die Wertehalbierung dauert demnach etwas mehr als drei Jahre.

h) Gebrauchtwert des alten Wagens ist $W(8) \approx 6\,710,89$ (€). Es müssen insgesamt noch 43 289,11 € angespart werden. Diese verteilen sich gleichmäßig auf acht Jahre zu je zwölf Monaten. Die monatliche Sparrate sollte deswegen 450,93 € betragen.